第21講　図形と方程式(3)

例題21－1

次の条件を満たす点Pの軌跡を求めよ.

(1)　2点A$(-1, 0)$, B$(1, 2)$から等距離にある点P

(2)　2点A$(-2, 0)$, B$(1, 0)$からの距離の比が$2:1$である点P

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

類題 21 ー 1

2 点 A$(-4,\ 0)$，B$(2,\ 0)$ について，次の条件を満たす点 P の軌跡を求めよ．

⑴　2 点 A，B から等距離にある点 P

⑵　2 点 A，B からの距離の比が 3：1 にある点 P

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

例題 21 ー 2

(1)　実数 a の値が変化するとき，放物線 $y=x^2-2ax+1$ の頂点Ｐの軌跡を求めよ．

(2)　m が実数のとき，円 $x^2+y^2+2(m+2)x-6my=0$ の中心Ｐの軌跡を求めよ．

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

類題 21 ― 2

(1)　a が実数のとき，放物線 $y=x^2-4ax-8a$ の頂点Ｐの軌跡を求めよ．

(2)　実数 m が変化するとき，円 $x^2+y^2+3mx-2m^2y+m^4+2m^2-1=0$ の中心が描く軌跡Ｐを求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

例題 21 － 3

次の不等式の表す領域を図示せよ.

(1)　$y<2x+1$　　(2)　$y\leqq x^2-x-2$　　(3)　$x^2+(y-2)^2\leqq 1$

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

類題21－3

次の不等式の表す領域を図示せよ．

(1)　$2x+3y-6\geqq 0$　　(2)　$y<-x^2+3x$　　(3)　$(x-2)^2+(y-1)^2<1$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

例題 21 ー 4

x，y が 4 つの不等式　$x \geqq 0$，$y \geqq 0$，$2x+y \leqq 8$，$2x+3y \leqq 12$ を同時に満たすとき，次の問いに答えよ．

(1)　4 つの不等式の表す領域を D とする．D を図示せよ．

(2)　点 $(x,\ y)$ が領域 D に属するとき，$x+y$ の最大値，最小値を求めよ．

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

類題 21 ー 4

x，y が 4 つの不等式　$x \geqq 0$，$y \geqq 0$，$x+3y \leqq 6$，$2x+y \leqq 7$ を同時に満たすとき，$3x+2y$ の最大値，最小値を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第21講　図形と方程式(3)

(1)　2点A(0, 2), B(4, 0)から等距離にある点Pの軌跡は，直線 $y=$ ア $x-$ イ である．

(2)　放物線 $y=x^2-2(a+1)x+3a^2-a$ の頂点Pが描く軌跡は，放物線 $y=$ ウ x^2- エ $x+$ オ である．

(3)　x, y が4つの不等式 $x\geqq 0$, $y\geqq 0$, $2x+y\leqq 5$, $x+3y\leqq 6$ を同時に満たすとき，$x+y$ の最大値は $\dfrac{\text{カキ}}{\text{ク}}$，最小値は ケ である．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 21 講　図形と方程式(3)

例題 21 ー 1
次の条件を満たす点Ｐの軌跡を求めよ.
(1)　２点 $A(-1,\ 0)$, $B(1,\ 2)$ から等距離にある点Ｐ
(2)　２点 $A(-2,\ 0)$, $B(1,\ 0)$ からの距離の比が２：１である点Ｐ

条件を満たす点Ｐの座標を $(x,\ y)$ とおく.
(1)　$AP=BP$　より　$AP^2=BP^2$
よって　$(x+1)^2+y^2=(x-1)^2+(y-2)^2$
$x^2+2x+1+y^2=x^2-2x+1+y^2-4y+4$
$x+y-1=0$
したがって, 点Ｐは直線 $x+y-1=0$ 上にある.
逆に, この直線上のすべての点は, 条件を満たす.
ゆえに, 求める軌跡は　**直線 $x+y-1=0$**
(2)　$AP:BP=2:1$ より　$AP=2BP$　　つまり　$AP^2=4BP^2$
よって　$(x+2)^2+y^2=4\{(x-1)^2+y^2\}$
$x^2+4x+4+y^2=4(x^2-2x+1+y^2)$
$3x^2+3y^2-12x=0$
$x^2+y^2-4x=0$
よって　$(x-2)^2+y^2=4$
したがって, 点Ｐは円　$(x-2)^2+y^2=4$　上にある.
逆に, この円上のすべての点は, 条件を満たす.
ゆえに, 求める軌跡は　**中心 (2, 0)　半径２の円**

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

類題 21 − 1
2点A(−4, 0), B(2, 0)について，次の条件を満たす点Pの軌跡を求めよ．
(1)　2点A，Bから等距離にある点P
(2)　2点A，Bからの距離の比が3：1にある点P

条件を満たす点Pの座標を(x, y)とおく．

(1)　AP＝BP　より　$AP^2=BP^2$

よって　$(x+4)^2+y^2=(x-2)^2+y^2$

$x^2+8x+16+y^2=x^2-4x+4+y^2$

$x=-1$

したがって，点Pは直線$x=-1$上にある．

逆に，この直線上のすべての点は，条件を満たす．

ゆえに，求める軌跡は　**直線$x=-1$**

(2)　AP：BP＝3：1より　AP＝3BP　つまり　$AP^2=9BP^2$

よって　$(x+4)^2+y^2=9\{(x-2)^2+y^2\}$

$x^2+8x+16+y^2=9(x^2-4x+4+y^2)$

$8x^2+8y^2-44x+20=0$

$x^2+y^2-\frac{11}{2}x+\frac{5}{2}=0$

よって　$\left(x-\frac{11}{4}\right)^2+y^2=\frac{81}{16}$

したがって，点Pは円　$\left(x-\frac{11}{4}\right)^2+y^2=\frac{81}{16}$ 上にある．

逆に，この円上のすべての点は，条件を満たす．

ゆえに，求める軌跡は　**中心$\left(\frac{11}{4}, 0\right)$　半径$\frac{9}{4}$の円**

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

例題 21 ー 2

(1)　実数 a の値が変化するとき，放物線 $y=x^2-2ax+1$ の頂点 P の軌跡を求めよ.

(2)　m が実数のとき，円 $x^2+y^2+2(m+2)x-6my=0$ の中心 P の軌跡を求めよ.

(1)　$y=x^2-2ax+1=(x-a)^2-a^2+1$　　頂点の座標は　$(a,\ -a^2+1)$

よって頂点 P の座標を $(x,\ y)$ とおくと

$x=a$　……①　　$y=-a^2+1$　……②

①，②より a を消去して　$y=-x^2+1$

したがって，求める点 P の軌跡は　**放物線 $y=-x^2+1$**

(2)　$x^2+y^2+2(m+2)x-6my=0$　より　$(x+m+2)^2+(y-3m)^2=10m^2+4m+4$

（$10m^2+4m+4=10\left(m+\dfrac{1}{5}\right)^2+\dfrac{18}{5}>0$ より，この式は確かに円を表す.）

よって円の中心 P の座標を $(x,\ y)$ とおくと

$x=-m-2$　……①，　$y=3m$　……②

①より　$m=-x-2$　　これを②に代入して　$y=3(-x-2)=-3x-6$

したがって，求める点 P の軌跡は　**直線 $y=-3x-6$**

類題 21 ー 2

(1)　a が実数のとき，放物線 $y=x^2-4ax-8a$ の頂点 P の軌跡を求めよ.

(2)　実数 m が変化するとき，円 $x^2+y^2+3mx-2m^2y+m^4+2m^2-1=0$ の中心が描く軌跡 P を求めよ.

(1)　$y=x^2-4ax-8a=(x-2a)^2-4a^2-8a$　　頂点の座標は $(2a,\ -4a^2-8a)$

よって頂点 P の座標を $(x,\ y)$ とおくと

$x=2a$　……①　　$y=-4a^2-8a$　……②

①より　$a=\dfrac{x}{2}$　これを②に代入して　$y=-4\left(\dfrac{x}{2}\right)^2-8\cdot\dfrac{x}{2}=-x^2-4x$

したがって，求める点 P の軌跡は　**放物線 $y=-x^2-4x$**

(2)　$x^2+y^2+3mx-2m^2y+m^4+2m^2-1=0$　より　$\left(x+\dfrac{3}{2}m\right)^2+(y-m^2)^2=\dfrac{m^2}{4}+1$

（$\dfrac{m^2}{4}+1>0$ よりこの式は確かに円を表す.）

よって円の中心 P の座標を $(x,\ y)$ とおくと

$x=-\dfrac{3}{2}m$　……①，　$y=m^2$　……②

①より　$m=-\dfrac{2}{3}x$　　これを②に代入して　$y=\left(-\dfrac{2}{3}x\right)^2=\dfrac{4}{9}x^2$

したがって，求める点 P の軌跡は　**放物線 $y=\dfrac{4}{9}x^2$**

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

例題 21 − 3

次の不等式の表す領域を図示せよ．

(1)　$y<2x+1$　　(2)　$y \leqq x^2-x-2$　　(3)　$x^2+(y-2)^2 \leqq 1$

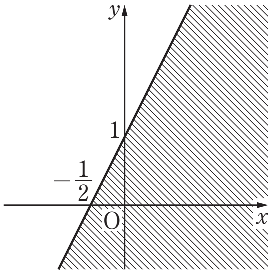
(1)　直線 $y=2x+1$ の下側の部分

(2)　放物線 $y=x^2-x-2$ およびその下側の部分

(3)　円 $x^2+(y-2)^2=1$ の周および内部

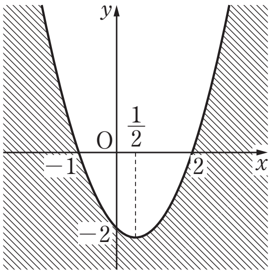
よって，求める領域は下図斜線部分

(1)



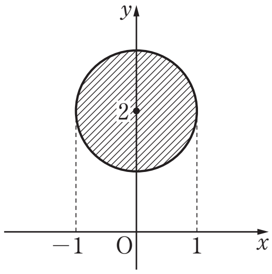
境界含まない．

(2)



境界含む．

(3)



境界含む．

類題 21 − 3

次の不等式の表す領域を図示せよ．

(1)　$2x+3y-6 \geqq 0$　　(2)　$y<-x^2+3x$　　(3)　$(x-2)^2+(y-1)^2<1$

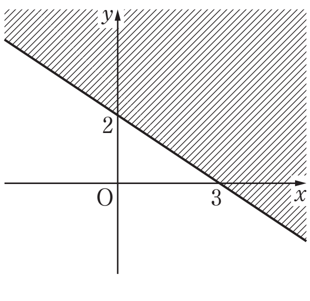
(1)　直線 $y=-\dfrac{2}{3}x+2$ およびその上側の部分

(2)　放物線 $y=-x^2+3x$ の下側の部分

(3)　円 $(x-2)^2+(y-1)^2=1$ の内部

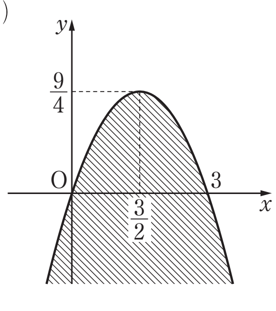
よって，求める領域は下図斜線部分

(1)



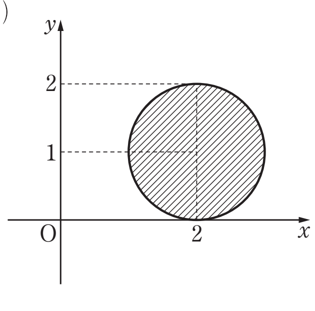
境界含む．

(2)



境界含まない．

(3)



境界含まない．

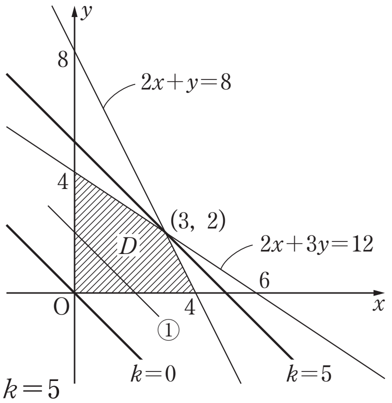
ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

例題21－4

x，y が4つの不等式　$x \geqq 0$，$y \geqq 0$，$2x+y \leqq 8$，$2x+3y \leqq 12$ を同時に満たすとき，次の問いに答えよ．

(1)　4つの不等式の表す領域を D とする．D を図示せよ．

(2)　点 $(x,\ y)$ が領域 D に属するとき，$x+y$ の最大値，最小値を求めよ．



(1)　与えられた連立不等式の表す領域 D は

4点 $(0,\ 0)$，$(4,\ 0)$，$(3,\ 2)$，$(0,\ 4)$ を

頂点とする四角形の周および内部である．

したがって，領域 D は右図斜線部．境界含む．

(2)　$x+y=k$　……①　とおく．

①は $y=-x+k$ より，傾き -1 の直線を表す．

この直線①が領域 D と共有点をもつときの

y 切片 k の最大値と最小値を求める．

直線①が $(3,\ 2)$ を通るとき k は最大で，その値は①より $k=5$

直線①が $(0,\ 0)$ を通るとき k は最小で，その値は①より $k=0$

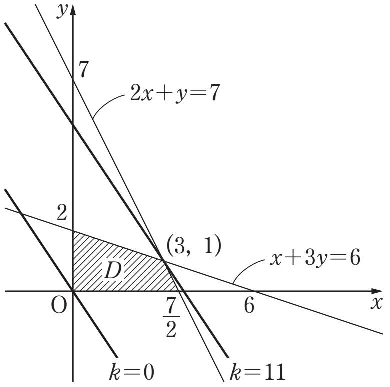
したがって，$x+y$ は

$x=3$，$y=2$ のとき　**最大値5**

$x=0$，$y=0$ のとき　**最小値0**　をとる．

類題21－4

x，y が4つの不等式　$x \geqq 0$，$y \geqq 0$，$x+3y \leqq 6$，$2x+y \leqq 7$ を同時に満たすとき，$3x+2y$ の最大値，最小値を求めよ．



与えられた連立不等式の表す領域を D とすると

領域 D は右図斜線部．境界含む．

$3x+2y=k$　……①　とおく．

①は $y=-\dfrac{3}{2}x+\dfrac{k}{2}$ より，傾き $-\dfrac{3}{2}$ の直線を表す．

この直線①が領域 D と共有点をもつときの

y 切片 $\dfrac{k}{2}$ の最大値と最小値，すなわち

k の最大値と最小値を求める．

直線①が $(3,\ 1)$ を通るとき k は最大で，その値は①より $k=3\cdot3+2\cdot1=11$

直線①が $(0,\ 0)$ を通るとき k は最小で，その値は①より $k=0$

したがって，$3x+2y$ は

$x=3$，$y=1$ のとき　**最大値11**

$x=0$，$y=0$ のとき　**最小値0**　をとる．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 21 講　図形と方程式(3)

(1)　2 点 A(0, 2), B(4, 0) から等距離にある点 P の軌跡は，直線 $y=$ ア $x-$ イ である．

(2)　放物線 $y=x^2-2(a+1)x+3a^2-a$ の頂点 P が描く軌跡は，放物線 $y=$ ウ x^2- エ $x+$ オ である．

(3)　x，y が 4 つの不等式 $x \geqq 0$，$y \geqq 0$，$2x+y \leqq 5$，$x+3y \leqq 6$ を同時に満たすとき，$x+y$ の最大値は $\dfrac{\text{カキ}}{\text{ク}}$，最小値は ケ である．

解答例

(1)　AP＝BP　より　$AP^2=BP^2$

よって　$x^2+(y-2)^2=(x-4)^2+y^2$　　$x^2+y^2-4y+4=x^2-8x+16+y^2$

$2x-y-3=0$

したがって，求める軌跡は　直線 $y=\mathbf{2}x-\mathbf{3}$　である．

(2)　$y=x^2-2(a+1)x+3a^2-a=\{x-(a+1)\}^2+2a^2-3a-1$

頂点の座標は　$(a+1,\ 2a^2-3a-1)$

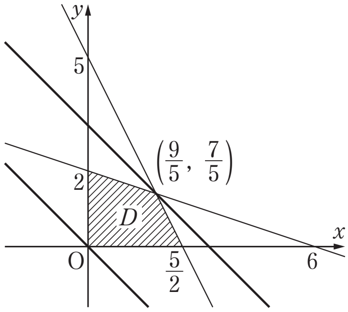
よって頂点 P の座標を $(x,\ y)$ とおくと　$x=a+1$　……①，$y=2a^2-3a-1$　……②

①より　$a=x-1$　これを②に代入して

$y=2(x-1)^2-3(x-1)-1=2x^2-7x+4$

よって求める点 P の軌跡は　放物線 $y=\mathbf{2}x^2-\mathbf{7}x+\mathbf{4}$　である．

(3)　与えられた連立不等式の領域を D とすると，



領域 D は右図斜線部．境界含む．

$x+y=k$　……①　とおく．

①は $y=-x+k$ より，傾き -1 の直線を表す．

この直線①が領域 D と共有点をもつときの

y 切片 k の最大値と最小値を求める．

直線①が $\left(\dfrac{9}{5},\ \dfrac{7}{5}\right)$ を通るとき k は最大で，

その値は①より　$k=\dfrac{16}{5}$

直線①が $(0,\ 0)$ を通るとき k は最小で，その値は①より　$k=0$

したがって，$x+y$ は

$x=\dfrac{9}{5}$，$y=\dfrac{7}{5}$ のとき　最大値 $\mathbf{\dfrac{16}{5}}$　　$x=0$，$y=0$ のとき　最小値 **0** をとる．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。